Hauptseminar über Homologische Algebra im WS 20/21

1 Einleitung - Motivation

Die homologische Algebra ist ein Teilgebiet der Algebra, die ihren Urpsprung in der algebraischen Topologie hat. Heute gehört sie zum Standrepertoire in der mathematischen Grundausbildung, was sicherlich daran liegt, dass ihre Methoden von einer außerordentlichen Allgemeinheit geprägt sind, so dass sie ein unentbehrliches Hilfsmittel nicht nur in der algebraischen Topologie, sondern auch in der algebraischen Geometrie, Zahlentheorie, Differentialgeometrie, der globalen oder komplexen Analysis, etc. geworden ist.

Die Anfänge der homologischen Algebra gehen auf B. Riemann zurück. In seiner Arbeit *Theorie abelscher Funktionen* aus dem Jahre 1857 untersuchte er insbesondere die *Wegunabhängikeit* folgendes Kurvenintegrals

$$\underbrace{\int_\alpha v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2}_{\text{1-Form-Notation}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left(\int_\alpha \vec{v}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right)}_{\text{klassische Notation}} \tag{1}$$

mit $\mathscr{C}^1$-Vektorfeld $v := (v_1, v_2) : X \to \mathbb{R}^2$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$. Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt $a := \alpha(0) = \beta(0)$ und gleichem Endpunkt $b = \alpha(1) = \beta(1)$, so ist $\gamma := \alpha - \beta$ einen geschlossener Weg (=Kurve) mit $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ (vgl. Abb. 1 links). Wegunabhängigkeit bedeutet also

$$\int_\alpha v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = \int_\beta v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\gamma v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = 0$$

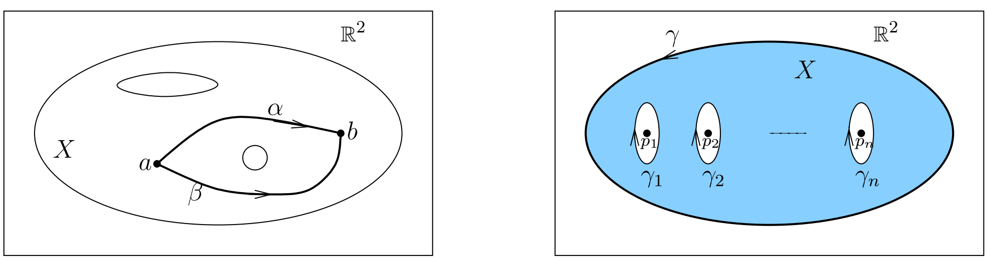


Abbildung 1: Links: Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals (1); rechts: Zum Green'schen Integralsatz.

Angenommen, man entfernt aus dem Bereich $X \subset \mathbb{R}^2$ Punkte $p_1, ..., p_n$ (z.B. weil v dort Singularitäten hat.) In wie weit das Kurvenintegral über γ dadurch beeinflusst wird, hängt davon ab, ob die Punkte im Inneren der Kurve γ liegen. Betrachte die *einfach geschlossen* Kurven γ_i, d.h. $S^1 \cong \operatorname{Bild} \gamma_i$, die, wie Abb.1 rechts zu entnehmen ist, im Inneren jeweils genau ein p_i enthalten. Ist γ ist gegen den Uhrzeigersinn, und alle γ_i's mit dem Uhrzeigersinn orientiert, so besagt der Green'sche Integralsatz:

$$\int_{\partial X} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = \int_\gamma v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 + \sum_{i=1}^n \left(\int_{\gamma_i} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 \right) = \int_X \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

Für $\sum_{i=1}^n \left(\int_{\gamma_i} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 \right)$ schreibt man auch $\int_{\sum_{i=1}^n \gamma_i} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2$. Wege lassen sich schreiben durch Summen, falls sie *in* Richtung der Orientierung, und Differenzen, falls *gegen* die Orientierung durchlaufen werden. Darüber hinaus kann p_i durch γ_i auch mehrfach umlaufen werden. Dies führt von Koeffizienten der Form ± 1 auf Linearkombinationen von Kurven mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$. Man bildet die *freie abelsche Gruppe* $G[S]$ mit der Basismenge S aller Wege $\sigma : [0,1] \to X \subset \mathbb{R}^2$. Jedes Element in $G[S]$ hat also die Darstellung $\alpha = \sum_{\sigma \in S} m_\sigma \sigma$ mit $m_\sigma \in \mathbb{Z}$, wobei $m_\sigma \neq 0$ für endlich viele. Nach dem

Green'schen Integralsatz verschwindet das rechte Integral für *rotationsfreie* Vektorfelder $v = (v_1, v_2)$, d.h. $\mathrm{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$, d.h.

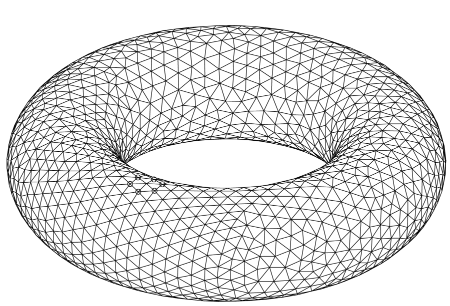
$$\int_{m\gamma + \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = 0.$$

Definiere wie folgt eine $\sim$ auf $G[S]$: Zwei Wege $\alpha = \sum_{\sigma \in S} m_\sigma \sigma$ und $\alpha' = \sum_{\sigma \in S} m'_\sigma \sigma$ sollen äquivalent heißen, d.h. $\alpha \sim \alpha'$, falls für alle rotationsfreien Vektorfelder $v = (v_1, v_2)$ die Integrale

$$\int_\alpha v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = \int_{\alpha'} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2$$

übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse eines α's wird Homologieklasse[1] von α genannt. Ist $\alpha - \alpha' = \sum_{\sigma \in S} \tilde{m}_\sigma \sigma$ ein Weg, dessen Bild im $\mathbb{R}^2$ einen zweidimensionalen kompakten Bereich X berandet, so gilt $\int_{\alpha - \alpha'} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = 0$, d.h. $\int_\alpha v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2 = \int_{\alpha'} v_1 \mathrm{d}x_1 + v_2 \mathrm{d}x_2$. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegral (1) liegt also vor, sofern sie (die Wege) in derselben Homologieklasse liegen. Anders ausgedrückt: Homologie mißt also, in wie weit ein Vektorfeld v Gradient eines Potentials V ist, oder was dasselbe ist, in wie weit eine 1-Form ω *exakt* ist (d.h. es ex. 0-Form f mit $df = \omega$).

Zur Definition der Homologie braucht es allerdings kein Integral über Vektorfelder (bzw. Differentialformen). Schon Riemann erkannte, dass topologische Räume X (oder der Einfachheit halber Teilmengen im $\mathbb{R}^n$) durch das Aufspüren gewisser *n-dimensionaler Löcher* unterschieden werden können. Aber erst 1899 gelang es H. Poincaré die Unstimmigkeiten von Riemann und Betti aufzulösen und die Berechnung der *Betti-Zahlen*, welche den Rang der heutigen Homologiegruppen entspricht, durch kombinatorische Daten, genauer *simpliziale Komplexe*, zu gewinnen. Dies war die Geburtsstunde der *simplizialen Homologie*.



Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge, die wir uns aufgebaut denken als sogenannten endlichen simplizialen Komplex, wie in nebenstehender Abbildung am Beispiel eines Torus dargestellt ist. Ein simplizialer Komplex X ist zusammengesetzt aus 0-Simplizes, d.h. Punkte $v_1, ..., v_n$, auch Ecken genannt; 1-Simplizes, das sind Strecken $[v_i, v_j]$, auch Kanten genannt, welche die Ecke v_i und v_j direkt verbindet; 2-Simplizes, das sind Dreiecke(flächen) $[v_i, v_j, v_k]$; 3-Simplizes $[v_i, v_j, v_k, v_l]$, das sind Tetraeder(-körper); und schließlich allgemein n-Simplizes $[v_{i_0}, ..., v_{i_n}]$ für $n \geq 0$.

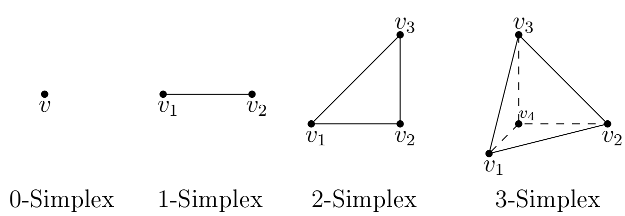


Abbildung 2: Beispiele für Simplizies im $\mathbb{R}^3$.

Die Kernfrage lautet: Ist die Vereinigung von n-Simplizes von X der Rand eines $n+1$-Simplex? Dazu:

- $n = 0$: Wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in X$ einen Weg (=Streckzug aus 1-Simplizes) gib, dessen Rand (Anfangs- und Endpunkt) gerade p, q ist, so heißt X *wegzusammenhängend*. Wenn es jedoch keinen Weg zu zwei Punkten $p, q \in X$ gibt, so hat X jedenfalls ein *Loch der Dimension 0*.
- $n = 1$: Sei $X := \mathbb{R}^2 \backslash 0$ die punktierte Ebene. Ein dreieckförmiger geschlossener Streckenzug Δ kann nur dann Rand eines 2-Simplex sein, wenn sein Inneres ganz zu X gehört. Liegt im inneren von Δ der Ursprung, so kann es wegen $0 \notin X$ kein solches 2-Simplex geben; man sagt dann, X hat ein

[1] aus dem Lateinischen: homologia = Übereinstimmung

Loch der Dimension 1. Entfernt man aus X die Eineitskreisschreibe $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, so bleibt es beim 1-dimensionalen Loch. Es kommt also nicht auf die „Größe“ des Loches an, sondern auf die Größe von n, mit der eine Vereinigung von n-Simplizes so ein Loch umschließen kann.

Dies führt nun zu folgender Konstruktion: Für jedes $n \geq 0$ betrachte die freie abelsche Gruppe $C_n(X)$ mit der Basismenge aller n-Simplizies $[v_{i_0}, ..., v_{i_n}]$. Die Elemente in $C_n(X)$ sind Linearkombinationen von n-Simplizes über $\mathbb{Z}$ und werden *simpliziale n-Ketten* genannt; man setzt $C_{-1}(X) = \{0\}$. Eine n-Kette, die Rand einer $n+1$-Kette von X ist heißt *simplizialer n-Rand.* Z.B. der Rand eines 1-Simplexes $[v_1, v_2]$ ist die Summe $v_2 - v_1$ zweier 0-Simplizes, also eine 0-Kette; der Rand eines 2-Simplexes $[v_1, v_2, v_3]$ ist die Summe $[v_2, v_3] - [v_1, v_3] + [v_1, v_2]$ seiner Kanten, also eine 1-Kette, etc. Die Randkette $[v_2, v_3] - [v_1, v_3] + [v_1, v_2]$ des 2-Simplexes $[v_1, v_2, v_3]$ in der punktierten Ebene $X := \mathbb{R}^2 \backslash 0$ ist allerdings genau dann kein 1-Rand, wenn 0 im inneren des 2-Simplex liegt. n-Ketten, die potentiell Rand einer $n+1$-Kette sein könnten werden *simpliziale n-Zyklen* genannt. Etwas formaler:

Definition 1. (i) Sei X ein endlicher simplizialer Komplex. Für $n \geq 1$ heißt die

$$\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X),\ \partial_n[v_0, ..., v_n] := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, ..., \hat{v}_i, ..., v_n] \quad \hat{v}_i \triangleq \text{(Wegglassen der } i\text{'ten Ecke)}$$

gegebene Abbildung <u>simplizialer Randhomomorphismus</u>. In der Tat ist dies ein Gruppenhomomorphismus. Wegen $C_{-1}(X) = 0$ ist $\partial_0 : C_0(X) \to C_{-1}(X)$ der Nullmorphismus.

(ii) Für jedes $n \geq 0$ heißt

$$\begin{aligned} Z_n(X) :=& \quad \mathrm{Kern}(\partial_n) && \text{Untergruppe der simplizialen } n\text{-Zyklen} \\ B_n(X) :=& \quad \mathrm{Bild}(\partial_{n+1}) && \text{Untergruppe der simplizialen } n\text{-Ränder} \end{aligned}$$

Aus der Definition des Randhomomorphismus lässt sich direkt nachrechnen, dass $\partial^2 = 0$ ist.

Lemma 2. Für alle $n \geq 0$ sind äquivalent:

(i) $B_n(X) \subset Z_n(X)$ ist eine Untergruppe

(ii) $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ (man schreibt dafür oftmals auch $\partial^2 = 0$)

Definition 3. (i) Die durch Hintereinanderausführung der Randhomomorphismen entstehende Sequenz

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \tag{2}$$

heißt aufgrund der Eigenschaft (ii) des Lemmas ein <u>(Ketten-)komplex</u>.

(ii) Die <u>n'te simpliziale Homologiegruppe</u> eines endlichen simplizialen Komplexes X ist definiert

$$\boxed{H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)}$$

Zwei n-Zyklen $c, c' \in Z_n(X)$ heißen *homolog*, falls sie sich um einen $n+1$-Rand unterscheiden, d.h.

$$c \sim c' \iff c - c' = \partial d \qquad \text{mit } d \in C_{n+1}(X)$$

Die Elemente (Äquivalenzaklssen) $[c] := c + B_n(X)$ in $H_n(X)$ werden *Homologieklassen* genannt. Die Homologiegruppen messen demnach, wie viele echte, d.h. nicht berandete Zyklen, also n-dimensionale Löcher X hat. Für topologische Räume stellen die Homologieruppen eine topologische Invariante dar, d.h. homöomorphe Räume haben dieselben Homologiegruppen. Ihre Bildung ist mit einer Vielzahl fundamentaler algebraischer Eigenschaften verbunden, welche sich z.B. nach S. Eigenberg und N. Steenrod axiomatisieren lassen, und so sich von rein topologischen Fragestellungen loslösen konnten. Im Seminar wird es vornehmlich um genau diesen algebraischen Formalismus gehen.

2 Inhalt

Gegenstand des Hauptseminars ist eine Einführung in die homologische Algebra. Als Hauptreferenz, die jeder Seminarteilnehmer im Detail auszuarbeiten hat, gehen wir dabei nach dem Buch von Rotman[Ro09] vor. Ergänzend sollen die Quellen [Ro02] sowie [Ve03] verwendet werden. Grundsätzlich soll jeder Seminarteilnehmer in einschlägigen Literaturdatenbanken der OTH-Bibliothek nach weiteren Quellen recherchieren. Vorträge können aus folgenden Themenbereichen ausgewählt werden:

- Historische Wurzeln der homologischen Algebra
  - (1. Vortrag) Simpliziale und singuläre Homologie von topologischen Räumen [Ro09] 1.1, 1.3
- Kategorien und Funktoren Teil I: Ziel der nachfolgenden Vorträge ist eine Einführung in die Sprache der Kategorien, Funktoren sowie natürlichen Transformationen, die es letztendlich ermöglichen, die homologische Algebra nicht nur auf topologische Probleme anzuwenden. Wichtig ist, dass die vorgestellten Begriffe und Resultate stets an möglichst bekannten Beispielen demonstriert werden, insb. an abelschen Gruppen, Ringen, oder R-Moduln.
  - (2.Vortrag) Kategorien: Defintion, Beispiele, insb. R-Moduln, Unterkategorien, duale Kategorie, Isomorphismen; Funktoren: Definitionen, Beispiele, insb. Dualisierungsfunktor, Hom-Funktoren, etc., Erhaltungseigeschaften, wie z.B. Komposition, Isomorphie, etc.; [Ro09] 1.2 Seite 7-23 [Ro02] 7.2, [Ve03] 2.1
  - (3. Vortrag) Natürliche Transformation: Definition, Beispiele, darstellbare Funktoren, Yoneda-Lemma und Yoneda-Einbettung [Ro09] 1.2 Seite 23-29; volle und true Funktionen, Äquivalenz von Kategorien und Charakterisierung gemäß Satz 3.6.7 in [Br16] 3.6
- Homologische Algebra in R-Moduln: R-Moduln können als Verallgemeinerung der k-Vektorräume betrachtet werden. Der Unterschied besteht darin, dass die skalare Multiplikation nicht von einem Körper k kommt, sondern von einem Ring mit 1. Ziel der Vorträge ist eine Einführung in die Modultheorie und homologischen Algebra derselbigen; Analogien zur bekannten linearen Algebra sollten nach Möglichkeit herausgearbeitet werden. Eine abelsche Gruppen nichts anderes als ein $\mathbb{Z}$-Modul. Damit schließt die Modultheorie ein Stück weit Gruppentheorie mit ein.
  - (4. Vortrag:) Der Begriff des Moduls über einen Ring; Homomorphismen, Isomorphismen; R-Modulstruktur der Homomorphismenmengen mit Beispielen; Definition additiver Funktoren von Mod_R nach **Ab**, Hom-Funktoren sind additiv Prop. 2.4/5, Untermodul, der von einer beliebige Teilmenge S in einem R-Modul M erzeugte Modul, endlich erzeugte Moduln, Kern und Bild eines Modulhomomorphismus Quotientenmoduln, Homomorphiesatz, Isomorphiesätze und Korrespondenz-Theoreme) [Ro09] 2.1 bis Seite 45, [Ro02] 7.1, [Ve03] 1.1, 1.4
  - (5.Vortrag) Sequenzen von R-Moduln, Charakterisierung von injektiven, surjektiven und bijektiven Modulhomomorphismen durch exakte Sequenzen, interne und externe direkte Summen, kurze exakte Sequenzen und deren Charakterisierungen durch Schnitte, Retraktionen und direkte Summanden, Splittingprinzip [Ro09] 2.1 Seite 53 einschließlich Prop.2.28, [Ro02] 7.1 ab S.435, [Ve03] 1.3
  - (6. Vortrag) Operationen mit Moduln: Produkte, (direkte)Summen, freie Moduln, links- bzs. rechts exakte Funktoren, Exaktheitskriterien für Hom-Funktoren [Ro09] Seite 53-64, [Ro02] 7.1, 7.2, siehe auch [Ve03] 1.2, 1.4 insb. Theorem 1.4.5;
  - (7. Vortrag) Tensorprodukt von Moduln und Eigenschaften, Existenz in der Kategorie der R-Link- bzw. Rechtsmoduln, Tensorproukt als Bifunktor, Bimoduln, skalare Erweiterung, Tensorprodukt von Moduln über kommutativen Ringen und dessen Eigenschaften [Ro09] 2.2 bis Seite 81, [Ro02] 8.4 sowie [Ve03] 1.5
  - (8. Vortrag) Definition von k-Algebren und deren Tensorprodukt, Exkatheitseigenschaften des Tensoproduktes, Verträglichkeit mit direkten Summen, adjungierte Isomorphismen erste und zweite Version [Ro09] 2.2 82-93, [Ro02] 8.4 sowie [Ve03] 1.5

- Kategorien und Funktoren: Teil II
  - (9. Vortrag) Universelle Konstruktionen: Produkte, Koprodukte, initiales - und finales Objekt einer Kategorie, Pullback (Faserprodukt), Pushout (gefaserte Summe) [Ro09] 5.1
  - (10. Vortrag) Abelsche Kategorien: Definition und Beispiele additiver Kategorien, Mono- und Epimorphismen, Kern und Kokern eines Morphismus, Unterobjekte, Quotientenobjekte, Definition und Beispiele abelscher - und exakter Kategorien, Kettenkomplexe, exakte Sequenzen [Ro09] 5.5 bis einschließlich Seite 311, [Ro09] 5.5.1

Literatur

[Br16] M. Brandenburg: *Eine Einführung in die Kategorientheorie*, Springer, 2016

[Ro02] J. J. Rotman: *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2002

[Ro09] J. J. Rotman: *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd Edition, Springer, 2009

[Ve03] L. R. Vermani: *An Elementary Approach to Homological Algebra*, Chapman& Hall/CRC, 2003

3 Notwendige Vorkenntnisse

Interessenten sollten sehr gute Kenntnisse aus der linearen Algebra I und II sowie der *elementaren Zahlentheorie* ZTH mitbringen. Das Seminar kann als eine Vertiefung des Stoffes aus ZTH im Hinblick auf algebraische Strukturen angesehen werden.

4 Voraussetzungen für die Scheinvergabe

Folgende notwendige Leistungen sind für die erfolgreiche Teilnahme am Seminar zu erbringen:

1. Abhaltung des Vortrages gemäß Einteilung, Vortragsdauer ca. 30 min
2. Schriftliche Ausarbeitung des Vortragsthemas nach Standard-wissenschaftlichen Maßtäben in LaTeX inklusive aller Beweise
3. Teilnahme an allen Besprechungs- und Vortragsterminen

5 Organisatorisches

Die Seminarvorträge finden in konzentrierter Form an einem Freitags- und Samstagstermin, ca 1 Monat vor dem Prüfungszeitraum WS 20/21 statt. Genaueres wird noch bekanntgegeben. Die Vortragseinteilung soll noch in der Vorlesungszeit **SS 20** stattfinden. Interessenten sind herzlich eingeladen, wie folgt vorzugehen:

- Informieren Sie sich über Vortragsthemen auf `www.oth-regensburg.de/jonny.dambrowski` bzw. diesem Dokument. Freilich ist zu berücksichtigen, dass sie thematisch stellenweise aufeinander aufbauen.
- Wählen Sie zwei Vortragsthemen aus, geordnet nach Priorität, und senden Sie mir diese per Mail (jonny.dambrowski@oth-regensburg.de) bis spätestens **21.08.20.**
- Vortragsvergabe erfolgt nach dem Motto *Wer zuerst kommt, malt zuerst* und ist **verbindlich**. Ein späteres Abspringen vom Seminar ist nur aus triftigen Grund (z.B. Krankheit) möglich.

- Bis Ende August 2020 wird ein endgültiges Seminarprogramm anhand der Interessentenlage erstellt, und Sie werden gemäß Ihren Präferenzen- sofern machbar - für ein Vortragsthema aus dem Programm eingeteilt.

24.07.20, gez. Prof. Dr. Jonny Dambrowski